Università degli Studi di Napoli Federico II

Come alla corte di Federico II 4

ovvero

parlando e riparlando di scienza

12ª edizione

12 febbraio 2015 - ore 20.30

PATATE, SPECCHI E CAPPELLI DA STREGA

Emilio Acerbi

Centro Congressi Federico II - Via Partenope, 36 - Napoli

COME ALLA CORTE DI FEDERICO II

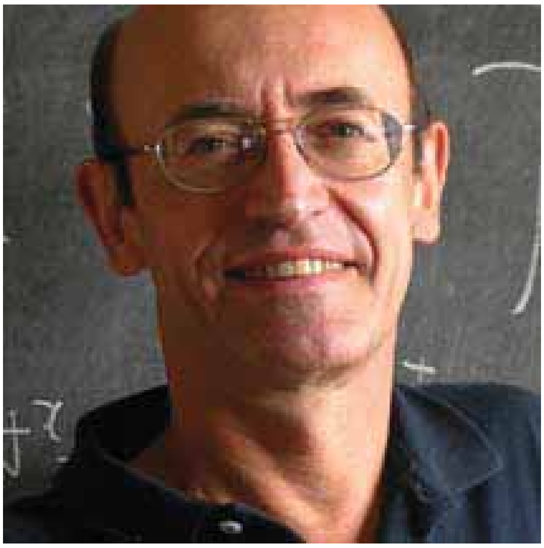
OVVERO

PARLANDO E RIPARLANDO DI SCIENZA

Gli articoli degli incontri si trovano all’indirizzo

www.comeallacorte.unina.it

Nella vita quotidiana spesso siamo alle prese con problemi di massimo o minimo: massimizzare il profitto, la felicità, la velocità, ridurre il tempo, la fatica, il percorso e un matematico per prima cosa cerca di dimostrare che la soluzione per questi casi esiste



Emilio Acerbi nasce a Milano nel 1955. Laureato in Matematica nel 1978 alla Scuola Normale Superiore; Ricercatore alla Scuola Normale Superiore dal 1981; Professore ordinario dal 1987, prima al Politecnico di Torino, poi (1991) all'Università di Parma.

È stato Direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma; per dieci anni Delegato del Rettore ai rapporti con le Scuole Superiori e all'Orientamento in ingresso; dal 2013 Coordinatore del Nucleo di Valutazione dell'Università di Parma.

Ha studiato con Sergio Spagnolo ed Ennio De Giorgi e ha sempre lavorato nella branca dell'Analisi matematica denominata Calcolo delle Variazioni, che ha visto in Italia una scuola di eccellenza, con maestri da Leonida Tonelli al napoletano Renato Caccioppoli a Ennio De Giorgi.

Nei suoi lavori si è occupato di problemi di esistenza e regolarità dei minimi di energie (1), di problemi di riduzione di dimensione in elasticità (2), di problemi a crescita irregolare (3), di problemi isoperimetrici (4).

Fra i lavori del gruppo (1), quasi tutti in collaborazione con Nicola Fusco (Napoli), alcuni risultati sono rientrati fra quelli fondamentali, con più di 100 volte il numero medio di citazioni del settore. Si tratta di dimostrazioni di esistenza e di regolarità di minimi di energie non lineari.

I lavori del gruppo (2) sono in prevalenza in collaborazione con Giuseppe Buttazzo (Pisa) e consentono di approssimare in energia le equazioni delle piastre, membrane e fili a partire da quelle tridimensionali (non con un semplice sviluppo asintotico).

I lavori (3), con Giuseppe Mingione (Parma), hanno aperto un filone di ricerca, fornendo gli strumenti indispensabili e i risultati di base per studiare energie con crescita che dipende dalla posizione (ad es. i fluidi elettroreologici); il gruppo (4) è il campo più recente, con (fra i sottoprodotti) una dimostrazione che certe configurazioni (ad es. per copolimeri a due blocchi) sono effettivamente dei minimi.

PATATE, SPECCHI E CAPPELLI DA STREGA

Emilio Acerbi

Professore di Analisi matematica
Università degli Studi di Parma

Una passeggiata in un campo della matematica frequentato da *detective* che non cercano numeri ma forme e funzioni, che per trovarle si ingegnano a indovinare a priori il maggior numero possibile delle loro caratteristiche, così da andarle a cercare nel posto giusto.

E perché questa ricerca? Per risolvere problemi di minimo: nella vita quotidiana siamo sempre alle prese con problemi di massimo o minimo: massimizzare il profitto, la felicità, la velocità, ridurre il tempo, la fatica, il percorso.

Che fa il matematico alle prese con un problema di massimo o minimo? Un primo punto fondamentale, affatto superfluo e spesso di trattazione tutt'altro che banale, è mostrare che la soluzione esiste: può sembrare inutile o ovvio, ma senza questo passo si rischia di cercare a vuoto, o peggio, si rischia di trovare con metodi approssimati (= mettendo tutto in mano a un calcolatore) una "soluzione" che soluzione non è.

In questa chiacchierata vedremo problemi-esempio in cui il minimo non esiste, e altri (noti o meno noti) in cui dimostreremo insieme che il minimo esiste (senza usare alcun metodo sofisticato, naturalmente).

Ne incontreremo altri ancora in cui, in certi casi con il contributo fondamentale di illustri matematici napoletani, è stato dimostrato che il minimo c'è, ma spesso ha una forma inaspettata o sorprendente.

La storia di questi problemi è antica, certamente precede il fiorire della matematica greca, e possiamo prendere come (difficile!) prototipo il cosiddetto Problema di Didone: fuggita da Tiro con il suo largo seguito, le fu offerto dal re Iarba "tanto terreno quanto poteva contenerne una pelle di toro." È noto che la regina prima trasformò la pelle in una lunga corda, poi la usò per **recintare la massima area possibile**. Ecco che nasce il primo problema isoperimetrico della storia:

"Determinare la figura piana di area massima fra quelle racchiuse da una curva di lunghezza data".

Sembra semplice, ma in questa frase sono contenuti molti punti problematici, fra cui cruciale è quello delle definizioni: cosa è una curva? Qual è la sua lunghezza? E cos'è la figura racchiusa dentro una curva? E cos'è l'area? Nessuna di queste domande è di facile risposta, e vi sono facili esempi che mostrano quanto esse siano delicate: "curve" che riempiono un quadrato, "figure piane" di cui è impossibile dire l'area, curve che non racchiudono nulla,...

Basti dire che il problema, nella sua versione in più dimensioni e nella sua massima generalità, può dirsi risolto solo dagli anni Cinquanta (Caccioppoli, De Giorgi). Non il 50 d.C., ma il 1950! E che ancor oggi vengono pubblicati numerosissimi articoli sui problemi isoperimetrici, campo in cui la scuola napoletana è maestra. Il problema di Didone può essere facilmente modificato in modo da renderlo assai complicato, anzi, il problema originale suonava così:

"Data una zona A del piano delimitata da una curva C (la terra, delimitata dalla linea di costa), determinare la parte di A avente area massima, fra tutte quelle racchiuse fra la curva C e una curva L di lunghezza assegnata, i cui estremi si poggiano su C".

In questa versione, la soluzione è estremamente delicata: si tratta di un problema isoperimetrico vincolato, di cui riusciremo insieme a dire qualcosa, precisamente vedremo che, agli estremi, la curva L che cerchiamo deve essere perpendicolare a C. Questo è un esempio di "*identikit*" della soluzione, che permette al matematico di limitare il campo entro cui cercarla.

Una questione molto imparentata: vi siete mai chiesti come mai la terra di un campo che inaridisce si spezza in modo così regolare, quasi a esagoni? Ma per arrivarci la storia è lunga, sarà meglio cominciare imparando da un lattoniere...

LA NATURA SCEGLIE IL MINIMO

Guido Trombetti

Professore di Analisi matematica
Università degli Studi di Napoli Federico II

Poincarè dimostrò che la terra è (grosso modo) una sfera utilizzando la proprietà isoperimetrica. Tale proprietà è quella per la quale a *parità di superficie la sfera racchiude il massimo volume.* O, ciò che è lo stesso, *a parità di volume la sfera è contornata dalla superficie minima*. Pertanto Poincarè ottiene il suo risultato utilizzando un ***principio di minimo***. Il ***principio di minima azione*** è molto diffuso in natura. La natura tende (quasi sempre) " ad evitare sprechi". Come se assumesse una determinata configurazione per risparmiare qualcosa: spazio, tempo, energia potenziale...

Un esempio molto semplice ed illuminante è fornito dal principio di riflessione della luce. Tale principio è attribuito ad Erone di Alessandria studioso del I secolo d.C. In un punto P c'è una sorgente da cui parte un raggio di luce. Esso si riflette in un punto C di una retta r ed arriva in un punto Q. Conosco P e Q. Come si ricava la posizione del punto C (punto di incidenza) sulla retta r? La risposta è semplice. Il punto C è quello che rende ***minima*** la somma delle distanza PC + CQ. Si tratta di una semplice applicazione di un ***principio di minimo***. Un altro fenomeno ottico molto noto è quello della rifrazione della luce. Se si immerge in parte un bastone in un secchio d'acqua, sembra che esso si spezzi sulla superficie dell'acqua. Questo fenomeno, *rifrazione della luce*, è prodotto dalla deviazione che subiscono i raggi di luce passando da un mezzo (l'aria) all'altro (l'acqua) La legge che governa il fenomeno della rifrazione è molto semplice ma comunque non possiamo riportarla qui. Ci interessa però sottolineare che anche in questo caso la legge di rifrazione viene ottenuta da Pierre Fermat utilizzando un ***principio di minimo***. La luce nell'attraversare i due mezzi impiega il ***tempo minimo***. Il **principio di minima azione**, fu enunciato intorno alla metà del '700 da Pierre Louis Moreau Maupertuis (1698-1759). Secondo Maupertuis l'azione può essere sintetizzata da un'espressione matematica. E tra tutti i percorsi possibili, la natura "sceglie" quello che rende minima l'espressione matematica che rappresenta l'azione. Il **principio di minima azione** (in particolare il fatto che la natura "scegliesse" i suoi comportamenti) aveva forti implicazioni filosofico-teologiche. E sollevò molte ed accese dispute. In particolare Voltaire non risparmiò a Maupertuis gli strali del suo terribile sarcasmo.

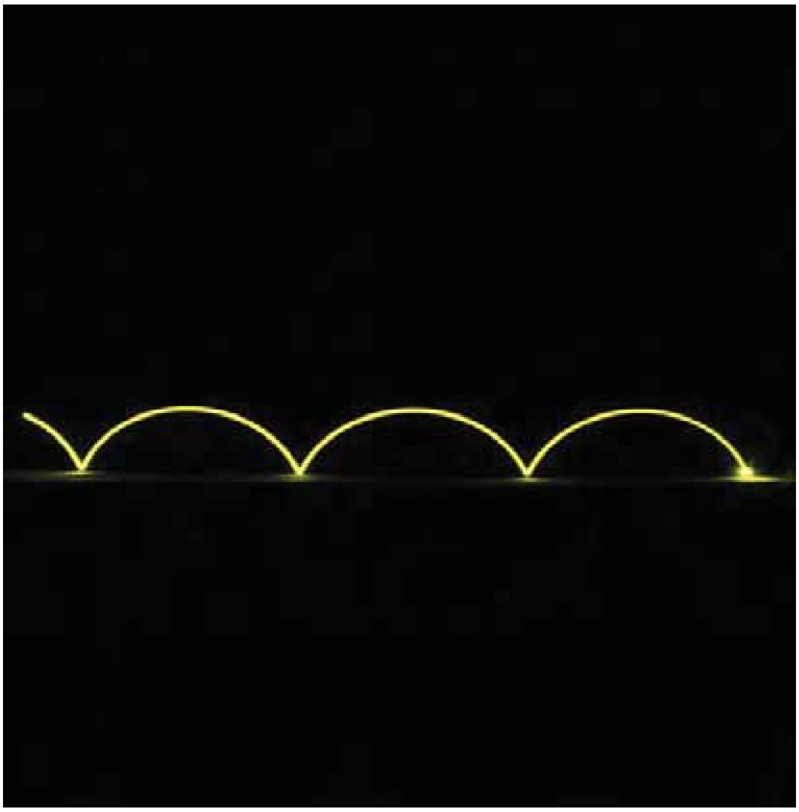
L'idea che attraverso i principi di minimo si potessero rappresentare molti fenomeni naturali in termini matematici ha determinato la nascita di uno dei più fecondi capitoli dell'analisi matematica: **il calcolo delle variazioni**.

La paternità della nascita del calcolo delle variazioni in un certo senso va attribuita a Johann Bernouilli che nel 1696 pose un celeberrimo problema (problema della ***brachistocrona***). "*Una particella deve andare da un punto A ad un punto B - posto più in* *basso - muovendosi sotto l'azione della sola gravità. Lungo quale curva deve muoversi per rendere minimo il tempo della discesa?"* È facile verificare che il tempo cambia a seconda della curva percorsa. E che il percorso rettilineo non è certo quello più veloce. Molti matematici si impegnarono a trovare la soluzione del problema.

Che è data da una curva detta "*cicloide*". Una curva bellissima. Niente affatto complicata da descrivere. Già nota e studiata, ad esempio, da Galileo che scriveva "*Quella curva arcuata, sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte."*

Si pensi ad una bicicletta che cammina. Scegliamo un punto fisso su una ruota. Al girare della ruota tale punto si muove e descrive una curva. Questa è la *cicloide.* Perché questo problema di minimo è storicamente importante? Pensate al caso della riflessione. La variabile (l'incognita) rispetto alla quale cercare il minimo è un punto. Nel caso della *brachistocrona* è un'intera curva. E, credetemi, c'è una bella differenza di complessità del problema. Il primo lo si può tranquillamente risolvere in un corso di matematica del quinto anno di un liceo scientifico. Il secondo…

[da 'Il Mattino' - luglio 2007]



MINIMI, VUOTI E FALSI VUOTI

Fedele Lizzi

Professore di Fisica teorica, modelli e metodi matematici
Università degli Studi di Napoli Federico II

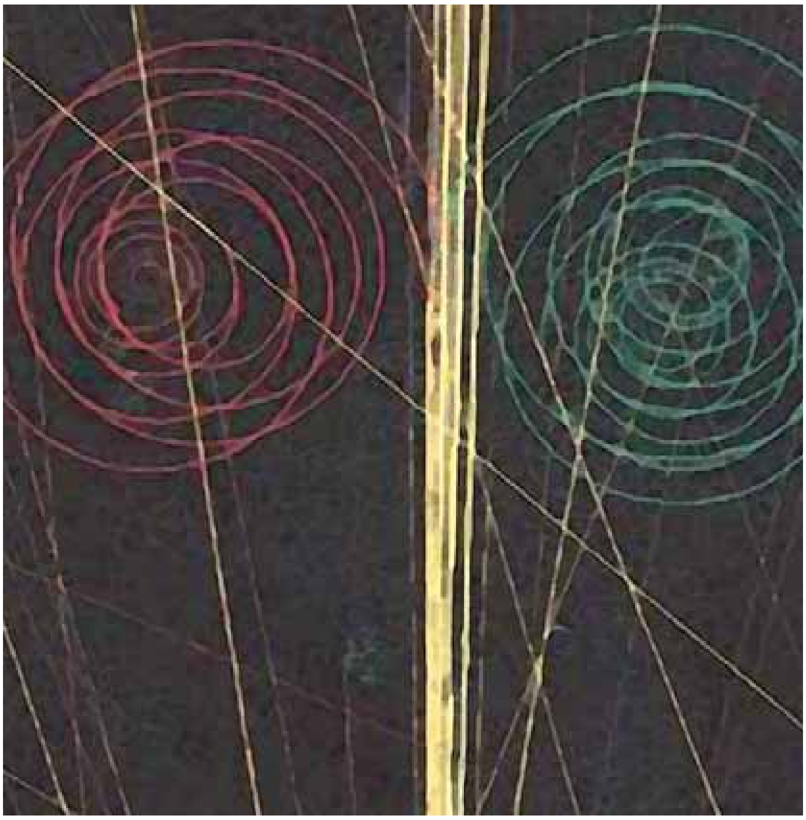
Trovare un minimo può essere una cosa complicata, ma per trovare il minimo di un potenziale c'è un metodo infallibile: basta caderci dentro! Immaginiamo di trovarci in montagna e di aver trovato un minimo, siamo in fondo alla vallata. Per spostarci abbiamo bisogno di energia per risalire la china, tornare al parcheggio, e tornare a casa, che si troverà ad una quota più bassa del fondo della valle iniziale. Il fondo della valle era un minimo, ma un minimo `locale', vi sono altri minimi più profondi, per esempio il livello del mare. Quando un corpo, o più in generale un sistema fisico, ha raggiunto un minimo vi resterà indefinitamente, a meno che non gli si fornisca dell'energia dall'esterno. Una piccola energia lo farà al massimo oscillare attorno al minimo.

La meccanica quantistica spariglia, e permette alle particelle di lasciare un minimo locale e raggiungerne uno più profondo. È un aspetto dell'effetto tunnel. Una particella quantistica può attraversare barriere insormontabili, cosa proibita alle particelle classiche, ma non alle onde di materia. Un fenomeno ben stabilito nei decadimenti radioattivi. Un isotopo di Uranio è un insieme di protoni e neutroni che ha risolto un problema di minimo, trovando una configurazione stabile, 'in fondo alla valle', e resterebbe lì se la meccanica quantistica non gli permettesse, con una certa probabilità, di trasformarsi spontaneamente in un atomo di torio ed una particella alfa. Per fare ciò la particella alfa deve superare una barriera di potenziale, l'equivalente atomico del nostro risalire la china della vallata. L'evento ha una sua probabilità, non è deterministico, e possiamo solo dire che dopo un certo tempo la metà degli atomi saranno decaduti.

Questo significa che ora potrei improvvisamente attraversare la barriera costituita dagli atomi del mio pavimento ed apparire nel soggiorno del piano di sotto? Dato che c'è una probabilità non nulla che questo avvenga basterà aspettare, e prima o poi… I corpi macroscopici hanno scale assai più alte di quelle delle particelle atomiche, per cui dovremmo pazientare moltissimo. Se proprio vogliamo dire qualcosa alla vicina meglio un *tweet*.

C'è un'altra affascinante applicazione dell'effetto tunnel. In teoria dei campi quantistici il minimo di una configurazione si chiama il vuoto. Le particelle sono eccitazioni di quest'ultimo, e il minimo è dato dalla loro assenza. Eppure il vuoto ha sempre delle caratteristiche, per esempio in esso sono insite le simmetrie delle interazioni fondamentali. Il nostro universo si trova in un vuoto, a parte le rare particelle che lo abitano. Che succederebbe se ci trovassimo in un 'falso vuoto'? Un minimo non assoluto. Esso sicuramente avrebbe caratteristiche molto diverse, per esempio le interazioni fondamentali, la stessa natura delle particelle sarebbe assai diversa. Alcune teorie cosmologiche usano questo fatto per favorire la cosiddetta inflazione, per cui l'universo ha avuto in passato un periodo di espansione esponenziale, causato da una transizione da un falso vuoto ad uno più profondo. E se fossimo in un falso vuoto ora? Ad un certo punto potremmo trovarci (o meglio non trovarci affatto) in un universo in cui tutte le forze che tengono insieme la materia sono diverse, e incapaci di sostenere la vita come la conosciamo.

Ma non vi preoccupate, la probabilità che questo accada è molto, ma molto, inferiore a quella di avere che la vicina, per effetto tunnel, appaia nel nostro soggiorno.



UN PO' DI TOPOLOGIA

Luciano Amito Lomonaco

Professore di Geometria
Università degli Studi di Napoli Federico II

C'è una branca della Matematica che ha un nome strano, ed è STRANA, ma si occupa anche di concetti semplici ed intuitivi: la TOPOLOGIA.

Potremmo dire che in Topologia ci si interessa di figure, ma non di misure. Due figure sono considerate equivalenti, al di là delle loro forme o dimensioni, se possono essere deformate l'una nell'altra con continuità, senza operare modifiche traumatiche (ad esempio tagli).

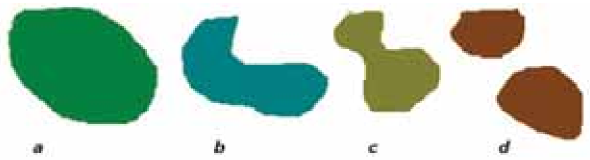


figura 1

In figura 1, gli insiemi *a*, *b*, *c* sono tra loro equivalenti, *d* non è equivalente ad alcuno degli altri, e così pure *e*. Una caratteristica tipicamente topologica è la *connessione*: *a*, *b*, *c*, *e* sono insiemi connessi. In un certo senso si può dire che una figura è connessa se è costituita da un unico pezzo. Pertanto *d* non è connessa, e si dice che ha due componenti connesse. La figura *e*, pur essendo connessa, non è equivalente alle prime tre, in quanto, come si suol dire, non è *semplicemente* connessa: ci sono curve chiuse in *e* che non possono contrarsi ad un punto (c'è il buco al centro!). Alcune caratteristiche tipiche di certe figure sono state già osservate in tempi remoti. Un esempio interessante è il seguente. Su una sfera (ad esempio un palloncino gonfiato) si disegnano delle figure poligonali (triangoli, quadrilateri, pentagoni,...) fino a ricoprire l'intera superficie sferica, in modo tale che due figure possano incontrarsi in lati comuni. Se si somma il numero F delle figure usate per ricoprire la sfera e il numero V dei vertici di tali figure, e si sottrae il numero L dei lati che compongono i perimetri di tali figure, si ottiene SEMPRE il numero 2, che prende il nome di caratteristica di Eulero della sfera. Il matematico Eulero scoprì infatti tale fenomeno nel XVIII secolo. A meno di deformazioni continue, possiamo vedere ad esempio i solidi platonici come deformazioni di una sfera, e verificare quanto appena detto .

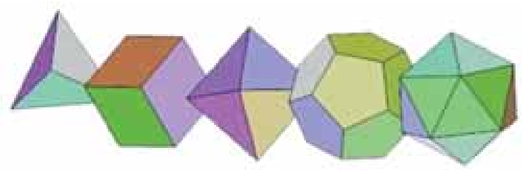


figura 2

tetraedro	**F=4**	**V=4**	**L=6**
bipiramide	F=8	V=6	L=12
cubo	F=6	V=8	L=12
dodecaedro	F=12	V=20	L=30
icosaerdo	F=20	V=12	L=30

Per ognuno di tali solidi Platonici si ha quindi che *F+V-L=2*. Se prendessimo in considerazione un pallone da calcio ricoperto da pentagoni ed esagoni, otterremmo lo stesso risultato. Questo è un esempio di *invariante topologico*. Lo stesso test, effettuato su una superficie torica (la superficie di una ciambella col buco), darebbe come risultato il numero 0.

Un altro esempio di caratteristica invariante in topologia si può descrivere con un gioco da proporre ad un bambino (o forse anche ad un adulto). Si considera una curva chiusa nel piano (che non si intrecci su se stessa). Un celebre teorema, il *Teorema della curva di Jordan*, ci assicura una cosa molto difficile da dimostrare, ma intuitivamente evidente. I punti del piano che non si trovano sulla curva formano un insieme non connesso, costituito da due componenti connesse, note come la parte *interna* ed *esterna* della curva. Se si considera un punto che non appartiene alla curva ci si chiede come si possa stabilire se esso è interno oppure esterno a tale curva. In alcuni casi la cosa è evidente.

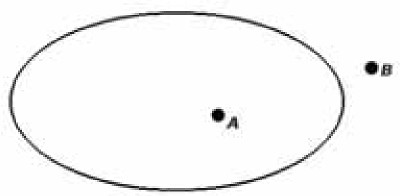


figura 3

Se però la curva è estremamente complicata, come quella in figura 4, il problema non è semplice.

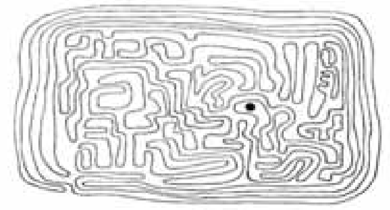


figura 4

Il metodo da proporre ad un bambino è di tipo grafico. Basta tracciare una curva che parta dal punto in esame e vada verso l'esterno. Badiamo che tale linea non tocchi la curva in modo tangente. Contiamo il numero di punti di intersezione tra la linea tracciata e la curva chiusa. Se tale numero è pari, il punto è esterno, se è dispari, il punto è interno.

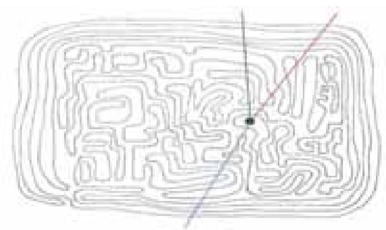


figura 5

Si può provare a tracciare varie linee, come è stato fatto in figura 5, e si troverà un numero di punti di intersezione variabile, ma sarà sempre pari, oppure sempre dispari (è un esempio di invarianza di una proprietà). Nel caso in esame il numero di punti trovati è sempre pari (12 nel caso delle linee verde e rossa, 16 nel caso della linea blu): il punto è esterno.

La formalizzazione di questi concetti è molto complicata, ma forse un approccio intuitivo a questioni topologiche potrebbe aiutare i ragazzi ad entrare in contatto con la matematica in modo indolore.

Un bellissimo tentativo in tal senso è stato fatto, parecchi anni fa, dal matematico Franco Ghione che in un suo libro, il *Tau Topologo*, spiega la topologia ai bambini. Questo articolo è dedicato a lui e a tutti gli Insegnanti che si sforzano di spiegare la Matematica ai ragazzi.

Organizzazione a cura del
Centro di Servizio di Ateneo per il Coordinamento di Progetti Speciali e l'Innovazione Organizzativa

COINOR